

## СЪДЪРЖАНИЕ

1. Детерминанти. Матрици. Действия. Обратна матрица, ранг на матрица, матрични уравнения. Системи уравнения. Формули на Крамер, метод на Сарус. Собствен вектор и собствени значения.	4
2. Аналитична геометрия в равнината.	5
3. Аналитична геометрия в пространството.	7
4. Криви от II степен в равнината.	9
5. Канонизиране на криви от II степен.	10
6. Производни на функция.	11
7. Неопределен интеграл	13
8. Определен интеграл – дължина на дъга. Лице на равнинни фигури. Лице на повърхнина и обем на геометрични тела.	16
9. Многократни интеграли. Повърхнина и обем на геометрични тела.	16
10. Екстремуми на функция с една променлива.	18
11. Инфлексни точки, изпъкналост и вдлъбналост.	18
12. Асимптоти – хоризонтални, вертикални и наклонени.	18
13. Екстремуми на функция с две променливи.	19
14. Граници на някои функции. Правило на Лопитал.	19
15. Признаци за сходимост на числени редове.	20
16. Радиус на сходимост.	22
17. Аналитична функция.	22
18. Интеграл на функция на комплексна променлива. Интегрална формула на Коши.	22
19. Разлагане на елементарна функция в степенен ред.	22
20. Ред на Фурие.	23
21. Комбинаторика и вероятности.	23
22. Диференциални уравнения.	25
23. Справочник по елементарна математика.	30

## Детерминанти и матрици

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

### Метод на Сарнус

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12};$$

### Формули на Крамер

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}; \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix};$$

Ако детерминантата е от по-висок ред, по аналогия определяме

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}; \Delta \neq 0.$$

$$p \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p a_{11} & p a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; p \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p a_{11} & p a_{21} \\ p a_{21} & p a_{22} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{матрица};$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}$  (поддетерминанта) - адюнгирани количества.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\text{Обратна матрица на } A \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{A} \cdot A^*; A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix};$$

Матрично уравнение  $AX = B$   $| \cdot A^{-1}$ ;  $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$ ;  $X = A^{-1} \cdot B$ ;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13};$$

Две матрици се умножават, като умножим елементите от I ред с елементите от I стълб, после с II стълб, с III стълб, след това елементите на II ред с елементите на I стълб, после с II стълб и т.н., както е показано по долу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

Ранг на матрица е броят на цифрите по главния диагонал, различни от нула, след като сме получили нули на триъгълник под главния диагонал на матрицата.

## Аналитична геометрия

### Уравнения на прави в равнината

Обикновено (декартово) уравнение на права  $y = kx + n$ ,

$k$  – ъглов коефициент,  $k = \operatorname{tg} \alpha$ ;

$ax + by + c = 0$  – общо уравнение;

Условие за  $\perp$  на две прави:  $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ ;  $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ ;

Условие за  $\parallel$  на две прави –  $k_1 = k_2$ ;  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ;

Ъгъл между 2 прави  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ ;

$y - y_1 = k(x - x_1)$  – уравнение на права през една точка  $M_1(x_1; y_1)$ ;

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$  – уравнение на права през 2 точки.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  – отрезково уравнение на права;

$\frac{ax + by + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0$  – нормално уравнение на права, знак обратен на знака

на  $c$ ;

$d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$  – разстояние от т.  $M(x_0, y_0)$  до права  $ax + by + c = 0$ ;

$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\pm \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\pm \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0$  – ъглополовящи на ъгъл между 2 прави.

Среда на отсечка  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ ,  $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$  – деление на отсечка в дадено отношение.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  – разстояние между 2 точки.

Пресечна точка на 2 прави  $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$ , решава се като система

– решение са координатите на пресечната точка.

Уравнение на всяка права, която минава през пресечната точка на други две прави, има уравнение:  $(A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$ .

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3), \vec{b}(b_1; b_2; b_3); \vec{c} \perp \vec{a} \text{ и } \vec{c} \perp \vec{b} \rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= i(a_2 b_3 - b_2 a_3) - j(a_1 a_3 - b_1 a_3) + k(a_1 a_2 - b_1 b_2) =$$

$$= i(a_2 b_3 - b_2 a_3) - j(a_1 b_3 - b_1 a_3) + k(a_1 b_2 - b_1 a_2);$$

$$\vec{c}(a_2 b_3 - b_2 a_3; b_1 a_3 - a_1 b_3; a_1 b_2 - b_1 a_2);$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$  – скалярно произведение на два вектора;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2; \quad \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}};$$

Векторно произведение  $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$ .

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}); \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix};$$

Ако  $\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  или  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ ;

Смесено произведение:  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ;

Двойно векторно произведение  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ ;

$$V_{\text{тетраедър}} = \frac{1}{6}(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}; \quad V_{\text{тетраедър}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}; \quad V = \frac{BH}{3}; \quad H = \frac{3V}{B};$$

**Уравнение на равнина**  $ax + by + cz + d = 0$ ;  $\vec{V}(a, b, c) \perp \alpha$ .

Уравнение на равнина през 3 точки:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \alpha: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение на равнина

$$\alpha \left\{ \begin{array}{l} zM_0(x_0, y_0, z_0) \\ \perp \vec{V}(A, B, C) \end{array} \right\}; \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

Уравнение на равнина

$$\alpha \left\{ \begin{array}{l} zM_0(x_0, y_0, z_0) \\ \overline{\vec{a}(a_1', a_2', a_3')} \\ \overline{\vec{b}(b_1', b_2', b_3')} \end{array} \right\}; \quad \alpha: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \alpha, \quad \text{ако } \Delta \text{ от координатите им е } 0 \rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\vec{n} \perp \alpha \rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix};$$

**Уравнение на права в пространството**

$$\text{Канонично уравнение } l: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}; \quad l \left\{ \begin{array}{l} zM_0(x_0, y_0, z_0) \\ \overline{\vec{a}(a_1, a_2, a_3)} \end{array} \right\};$$

$$\text{Параметрично уравнение на права } l: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

$$\text{Уравнение на права през 2 точки } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

$$\alpha: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0; \quad \vec{v}(a_1, b_1, c_1) \perp \alpha;$$

$$\begin{cases} \alpha: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ \beta: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}; \quad \alpha \perp \beta \rightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0;$$

$$\alpha \parallel \beta \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}; \quad \alpha \equiv \beta \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2};$$

$$g_1: \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}; \quad g_2: \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3};$$

$$g_1 \parallel g_2 \rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}; \quad g_1 \perp g_2 \rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0; \quad g_1 \cap g_2 \rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \cos(\alpha, \beta) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}};$$

$$g: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}; \quad \alpha: ax + by + cz + d = 0;$$