Съдържание

Детерминанти и матрици

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

Метод на Сариус

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}.a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12};$$

Формули на Крамер

$$\left|\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{matrix}\right.; \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix};$$

Ако детерминантата е от по-висок ред, по аналогия определяме $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}; \ \Delta \neq 0.$

$$p.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p\,a_{11} & p\,a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad p.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\,a_{11} & p\,a_{21} \\ p\,a_{21} & p\,a_{22} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ - матрица;

$Aij = (-1)^{i+j}.(\text{поддетерминанта})$ - адюнгирани количества.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{12} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

Обратна матрица на $A \to A^{-1} = \frac{1}{A}.A^*; \ A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix};$

Матрично уравнение $\underline{AX = B}\,\big|.A^{-1}$; $A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$; $\underline{X = A^{-1}.B}$;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13};$$

Две матрици се умножават, като умножим елементите от I ред с елементите от I стълб, после с II стълб, с III стълб, след това елементите на II ред с елементите на I стълб, после с II стълб и т.н., както е показано по долу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} \end{pmatrix}.$$

Ранг на матрица е броят на цифрите по главния диагонал, различни от нула, след като сме получи нули на триъгълник под главния диагонал на матрицата.

Аналитична геометрия

Уравнения на прави в равнината

Обикновено (декартово) уравнение на права $y = kx + n$,

k – ъглов коефициент, $k = \operatorname{tg}\alpha$;

$ax + by + c = 0$ - общо уравнение;

Условие за $\perp$ на две прави: $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$; $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$;

Условие за || на две прави - $k_1 = k_2$; $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

Ъгъл между 2 прави $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$;

$y - y_1 = k(x - x_1)$ - уравнение на права през една точка $M_1(x_1; y_1)$;

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ - уравнение на права през 2 точки.

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ - отрезово уравнение на права;

$\dfrac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$ - нормално уравнение на права, знак обратен на знака на c;

$d = \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$ - разстояние от т. $M(x_0, y_0)$ до права $ax + by + c = 0$;

$\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0$ - ъглополовящи на ъгъл между 2 прави.

Среда на отсечка $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ - деление на отсечка в дадено отношение.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ - разстояние между 2 точки.

Пресечна точка на 2 прави $\begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{vmatrix}$, решава се като система – решение са координатите на пресечната точка.

Уравнение на всяка права, която минава през пресечната точка на други две прави, има уравнение: $(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$.

$\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$; $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b} \rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$

$= i(a_2b_3 - b_2a_3) - j\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} =$

$= i(a_2b_3 - b_2a_3) - j(a_1b_3 - b_1a_3) + k(a_1b_2 - b_1a_2)$;

$\vec{c}(a_2b_3 - b_2a_3;\ b_1a_3 - a_1b_3;\ a_1b_2 - b_1a_2)$;

$\underline{\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})}$ - скаларно произведение на два вектора;

$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$; $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$;

Векторно произведение $\vec{a}\times\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_1b_2 - a_2b_1$.

$S_\Delta = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$; $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$;

Ако $\vec{a}\perp\vec{b} \rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$ или $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$;

Смесено произведение: $\vec{a}.\vec{b}.\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\vec{c}$;

Двойно векторно произведение $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$;

$V_{\text{тетраедър}} = \dfrac{1}{6}\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\overline{AD}$; $V_{\text{тетраедър}} = \dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$; $V = \dfrac{BH}{3}$; $H = \dfrac{3V}{B}$;

Уравнение на равнина $\underline{ax + by + cz + d = 0;\ \vec{V}\left(a, b, c\right)\perp\alpha}$.

Уравнение на равнина през 3 точки:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \alpha: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение на равнина

$$\alpha\begin{cases} zM_0\left(x_0;\ y_0,\ z_0\right) \\ \perp\vec{V}\left(A,\ B,\ C\right) \end{cases}; \ A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0;$$

Уравнение на равнина

$$\alpha\begin{cases} zM_0\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right) \\ \parallel \overrightarrow{a\left(a_1';\ a_2';\ a_3'\right)} \\ \parallel \overrightarrow{b\left(b_1';\ b_2';\ b_3'\right)} \end{cases}; \ \alpha: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \alpha$, ако Δ от координатите им е $0 \rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

$$\vec{n}\perp\alpha \rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix};$$

Уравнение на права в пространството

Канонично уравнение $l: \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}$; $l\begin{cases} Z\,M_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \\ \parallel \vec{a}\left(a_1, a_2, a_3\right) \end{cases}$;

Параметрично уравнение на права $l: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t; \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$

Уравнение на права през 2 точки $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$;

$\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$; $\vec{v}\left(a_1, b_1, c_1\right)\perp\alpha$;

$\begin{vmatrix} \alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{vmatrix}$; $\alpha\perp\beta \rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$;

$\alpha\parallel\beta \rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$; $\alpha\equiv\beta \rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$;

$g_1: \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2} = \dfrac{z - z_1}{a_3}$; $g_2: \dfrac{x - x_2}{b_1} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{b_3}$;

$g_1\parallel g_2 \rightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$; $g_1\perp g_2 \rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$; $g_1\cap g_2 \rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0; \ \cos\left(\alpha, \beta\right) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}};$$

$g: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$; $\alpha: ax + by + cz + d = 0$;