Критерий на Лайбниц

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,\ a_n>0$. Ако разглежданата редица $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е монотонно намаляваща за всяко $n>n_0$ и $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то даденият ред е сходящ.

Да се изследват за сходимост редовете:

Задача 27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{1}{n}$;

Решение: $1, -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}, ...$ Но $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$ е разходящ, тогава даденият ред е условно сходящ. По критерий на Лайбниц е сходящ.

Задача 28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

Решение: $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{(n+1)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=0$; По критерий на Лайбниц е сходящ, защото $u_1>u_2>u_3,...$, т.е. $\frac{3}{2}, \frac{5}{3.2}, \frac{7}{4.3}, ...$ намаляваща.

Задача 29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+16}$;

Решение: $\rightarrow \frac{1}{17}, \frac{2}{20}, \frac{3}{25}, \frac{4}{32}, ...$ Разглеждаме:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+16};\ f'(x)=\frac{1.(x^2+16)-x(2x)}{(x^2+16)^2}=\frac{x^2+16-2x^2}{(x^2+16)^2}=\frac{16-x^2}{(x^2+16)^2};$$

$(x^2+16)^2>0$ за $\forall x$; $f'(x)<0$; $16-x^2=0$; $x_{1,2}=\pm 4$;

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ & -4 & & 4 & \end{array}$$

$f(x)$ е намаляваща за $x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$.

$f(x)$ е намаляваща за всяко $n>4$; $n_0=4$.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+16}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2\left(1+\frac{16}{n^2}\right)}=\frac{1}{\infty}=0, \lim_{n\to\infty}a_n=0$ и следователно даденият ред е сходящ по критерий на Лайбниц.

Задача 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin^n\frac{1}{n}}{n^n}$;

Решение: $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{\arcsin^n\frac{1}{n}}{n^n}}=\frac{\arcsin\frac{1}{n}}{n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{n}}{n}=0$, следователно дад. ред е сходящ по критерий на Лайбниц или $\arcsin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n.n}=0$.

Задача 31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}$;

Решение: $\frac{1}{\sqrt{n}-1}>\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$ - разходящ ред, следователно и даденият ред е разходящ.

Задача 32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$;

Решение: $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$; Полагаме $\sqrt{x}=t$; $x=t^2$; $dx=2t\,dt$, когато $x\to 1$ и $t\to 1$, $x\to\infty$ и $t\to\infty$.

$$\int_{n=1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\int_1^{\infty}\frac{2t.dt}{1+t}=2\int_1^{\infty}\frac{(t+1)-1}{1+t}dt=2\int_1^{\infty}\frac{t+1}{t+1}dt-2\int_1^{\infty}\frac{dt}{1+t}=$$

$=\left(2t-2\ln(1+t)\right)\Big|_1^{\infty}=\infty$ - разходящ.

II начин: $\frac{1}{\sqrt{n}+1}>\frac{1}{n+1}$ - хармоничният ред разходящ и сл. $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ е разходящ (признак за сравняване).

III начин:

Сравняваме реда $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ и $\frac{1}{n+1}\rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}:\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}+1}=$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} > 0$$ и от $\frac{1}{n+1}$ - разходящ, следва, че $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ е разходящ.

Задача 33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

Решение: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.3^n}} = \left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^n.\frac{1}{3} = \frac{e}{3} < 1$ - сходящ.

Задача 34. Да се изследва за сходимост $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$;

Решение: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; С интегралния критерий на Коши:

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \int_2^{\infty} \ln x d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_2^{\infty} = \infty - \frac{\ln^2 2}{2} = \infty$$ - разходящ.

Да се изследва за сходимост:

Задача 35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2.4^{2n}}$;

Решение: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!)^2.4^{2n+2}}.\frac{(n!)^2.4^{2n}}{(2n)!} =$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!\cancel{(n!)^2}.\cancel{4^{2n}}}{(n+1)^2.\cancel{(n!)^2}.\cancel{4^{2n}}(2n)!4^2} = \frac{(2n+2).(2n+1)}{(n+1)^2.4^2};$$

$n! = n(n-1)...3.2.1$; $(2n)!! = 2n(2n-2)...4.2$;

$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)...5.3 = (2n+1)(2n-1)!!$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2+\frac{2}{n}\right).n.\left(2+\frac{1}{n}\right)}{16n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} < 1$$ - сходящ по критерий на

Даламбер.

Задача 36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(4n+3).3^n}$;

Решение: $a_n = \frac{(2n+1)!}{(4n+1).3^n}$; $a_{n+1} = \frac{(2(n+1)+1)!}{(4(n+1)+1).3^{(n+1)}} = \frac{(2n+3)!}{(4n+5).3^n.3} =$

$$= \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(4n+5).3^n.3}; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!}}{(4n+5).\cancel{3^n}.3}.\frac{(4n+1).\cancel{3^n}}{\cancel{(2n+1)!}};$$

$$\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)(4n+1)}{(4n+5)} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{3}2}\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}.\left(4+\frac{5}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4.\cancel{4}.n^2}{\cancel{4}} = \infty$$ - разходящ по критерий на Даламбер.

Задача 37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3}{(2n-1)!!}$;

Решение: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n.2(n+1)^3}{(2n+1)!!} : \frac{2^n.n^3}{(2n-1)!!} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}.2(n+1)^3.\cancel{(2n-1)!!}}{(2n+1)\cancel{(2n-1)!!}.\cancel{2^n}.n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)n^3}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n} = 0 < 1$$ - сходящ.

Задача 38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$;

Решение: $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^{n-1}} \to$ сходящ;

II начин: С геометрична прогресия $q = \frac{1}{2}$ и следователно даденият ред е сходящ.

III начин: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} =$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e(n+1)}=0\ \to\ \text{сходящ.}$$

Задача 39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

Решение: Но $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$ и от $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ разходящ, следователно и даденият ред е разходящ.

Задача 40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$;

Решение: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}=\frac{(n+1).\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}.2.n}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)$;

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1$ - сходящ.

Задача 41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$;

Решение: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+2}{3^{n+1}}:\frac{n+1}{3^n}=\frac{(n+2).\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}.3.(n+1)}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{3}<1$ - сх.

Задача 42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;

Решение: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}:\frac{n!}{10^n}=\frac{n!(n+1).10^n}{n!10^n.10}=\frac{n+1}{10}$;

$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$ - разходящ; $(n>10)$.

Задача 43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$;

Решение:

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{5^{(n+!)}}:\frac{n!}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}(n+1).\cancel{5^n}}{\cancel{n!}\cancel{5^n}.5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=\infty$ - разходящ; $(n>5)$.

Задача 44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(p+n)!}$; **Решение:**

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)\cancel{n!}\cancel{(p+n)!}}{\cancel{n!}(p+n+1)\cancel{(p+n)!}}=\frac{(n+1)}{p+n+1}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{p+1}{n}\right)}=1$ - не се знае!

Прилагаме критерия на Раабе – Дюамел:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{p+n+1}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{p+\cancel{n}+\cancel{1}-\cancel{n}-\cancel{1}}{n+1}\right)=$$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n.p}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=p$; $p>1$ - сходящ; $p\le 1$ - разходящ.

Задача 45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n^2}$;

Решение: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!!}{(n+1)^2}.\frac{1.n^2}{(2n)!!}=\frac{(2n+2)\cancel{(2n)!!}.n^2}{(n+1)^2.\cancel{(2n)!!}}$;

$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{2}{n}\right).\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\infty.2>1$ - разходящ.

Задача 46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n.n^3}{(2n-1)!!}$;

Решение: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)^3}{[2(n+1)-1]!!}.\frac{(2n-1)!!}{2^n.n^3}=\frac{2\left(\frac{n+1}{n}\right)^3.(2n-1)!!}{(2n+1)!!}=$

$=\frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^3.\cancel{(2n-1)!!}}{(2n+1)\cancel{(2n-1)!!}}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}=0<1$

- сходящ по критерий на Даламбер.