Зад. 21: $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$

$$y' = \frac{1}{\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y}$$

Уравнението не е хомогенно спрямо y, но ако вземем реципрочните стойности, ще получим хомогенно уравнение спрямо x:

$\frac{dx}{dy} = x\operatorname{ctg} y + \sin^2 y$. Уравнението е линейно спрямо x, но $x = x(y)$

$p = \operatorname{ctg} y, \quad Q = \sin^2 y$

$x = e^{\int \operatorname{ctg} y dy}\left[c + \int\left(\sin^2 y . e^{-\int \operatorname{ctg} y dy}\right) dy\right] = \sin y[c + \int \sin y dy] = \sin y[c - \cos x]$ или $x = \sin y(c - \cos x)$, при решаването на което взехме пред вид следните пресмятания:

$$\int \operatorname{ctg} y dy = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int \frac{d\sin y}{\sin y} = \ln|\sin y| + C$$

$$e^{\ln|\sin y|} = \sin y$$

$$-\int \operatorname{ctg} y dy = -\ln|\sin y| = \ln\left|\frac{1}{\sin y}\right| + C.$$

Бернулиеви диференциални уравнения

$y' = p(x)y + q(x)y^n; \quad n \neq 0; 1$

Решават се с полагането $z = \frac{1}{y^{n-1}}$

Задача. Решете диференциалните уравнения:

22) $xy' + 2y + x^5 e^x y^3 = 0$;

23) $y'(x^3 \sin y - x) = -2y$

24) $(2x^2 y \ln y - x)' = y$

Решения:

Зад. 22: $xy' + 2y + x^5 e^x y^3 = 0$

$y' = -\frac{2y}{x} - x^4 e^x y^3$

$n = 3;\ z = \frac{1}{y^2};\ y = \frac{1}{\sqrt{z}};\ y' = \frac{-z'}{2z\sqrt{z}}$

Заместваме в уравнението и получаваме

$$\frac{-xz'}{2z\sqrt{z}} + \frac{2}{\sqrt{z}} + x^5 e^x . \frac{1}{z\sqrt{z}} = 0$$

$-xz' + 4z + 2x^5 e^x = 0;\ z' = \frac{4z}{x} + 2x^4 . e^x$ – уравнението е линейно спрямо z и $p = \frac{4}{x}$, $\quad Q = 2x^4 e^x$. Тогава

$$z = e^{4\int \frac{1}{x} dx}\left[c + \int\left(2x^4 e^x . e^{-4\int \frac{1}{x} dx}\right) dx\right] = x^4[c + 2e^x).$$

Но $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$ и $y = \frac{1}{x^2\sqrt{c + 2e^x}}$.

Зад. 23: $y'(x^3 \sin y - x) = -2y$ Вземаме реципрочните стойности:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^3 \sin y - x}{-2y}$$

① $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}.x - \frac{\sin y}{2y}.x^3$ Уравнението е Бернулиево.

Полагаме $z = \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{1}{x^{3-1}} = \frac{1}{x^2}$

От $z = \frac{1}{x^2}$, $\quad x = \frac{1}{\sqrt{z}}$; $\quad x' = \frac{-z'}{2\sqrt{z}.z}$

Заместваме в ① и получаваме

$$\frac{-z'}{2z\sqrt{z}} = \frac{1}{2y\sqrt{z}} - \frac{\sin y}{2y}.\frac{1}{z\sqrt{z}}\bigg| . -2z\sqrt{z}$$

$z' = \frac{-z}{y} + \frac{\sin y}{y}$. Това уравнение е линейно спрямо z. Тогава

$$z = e^{-\int \frac{1}{y} dy}\left[c + \int\left(\frac{\sin y}{y}.e^{\int \frac{1}{y} dy}\right) dy\right] = e^{\ln\frac{1}{y}}\left[C + \int \frac{\sin y . y}{y} dy\right] = 0$$

$z = \frac{1}{y}[c - \cos y];\quad \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y}(c - \cos y)$, от където

$$x = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{c - \cos y}}$$

Зад. 24: $2x^2 y \ln y - x)y' = y$

Спрямо y уравнението не е от познат вид, затова вземаме реципрочните стойности.

$$(2x^2 y\ln y - x)\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x^2 y \ln y - x}{y}$$

① $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{1}{y}x + 2\ln y . x^2$ – уравнението е Бернулиево спрямо x. Полагаме

$z = \dfrac{1}{x^{n-1}} = \dfrac{1}{x^{2-1}} = \dfrac{1}{x}$, от където $x = \dfrac{1}{z}$ и $x' = -\dfrac{1}{z^2}.z'$.

Заместваме в уравнението ① и получаваме

$$\frac{-z'}{z^2} = 2\ln y . \frac{1}{z^2} - \frac{1}{y.z}\Big| .(-z^2)$$

$z' = \dfrac{z}{y} - 2\ln y$ – уравнението е линейно спрямо z. Тогава

$$z = e^{\int \frac{1}{y}dy}\left[c + \int\left(-2\ln y e^{-\int \frac{1}{y}dy}\right)dy\right]$$

$$z = y\left[c - 2\int \frac{\ln y dy}{y}\right] = y[c - (\ln y)^2]$$

Но $x = \dfrac{1}{z}$ и $x = \dfrac{1}{y(C - \ln^2 y)}$, където пресметнахме

$e^{\ln y} = y$, $e^{-\ln y} = e^{\ln \frac{1}{y}} = \dfrac{1}{y}$ и

$$\int \frac{\ln y}{y}dy = \int \ln y d\ln y = \frac{\ln^2 y}{2}$$

Уравнения на Рикати

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

Уравненията от този вид се решават чрез субституцията $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$, където y_1 е един частен интеграл (едно решение) и с тази смяна уравнението се свежда до линейно, а чрез субституцията $y = y_1 + z$ се свежда до Бернулиево.

Задача: Решете диференциалните уравнения:

25) $y' = \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2x^2}$, ако допуска частно решение от вида $y_1 = \dfrac{a}{x}$

26) $y' = 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$, ако допуска частен интеграл от вида $y_1 = e^x$

27) $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$, $y_1 = ax + b$

Решения:

Зад. 25: $y_1' = \dfrac{-a}{x^2}$, което заместваме в даденото уравнение и определяме стойността на a:

$$\frac{-a}{x^2} = \frac{1}{2}.\frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\Big| .2x^2$$

$-2a = a^2 + 1$, $a^2 + 2a + 1 = 0$, $a = -1$. Ако се получат два различни корена, избираме един от тях.

Тогава $y_1 = \dfrac{-1}{x}$ и $y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$. С тази субституция свеждаме даденото уравнение до линейно. $y' = \left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}\right)' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{z'}{z^2}$. Заместваме в даденото уравнение стойностите на y и y' и получаваме.

$$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{2xz} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2x^2}$$

$z' = +\dfrac{z}{x} - \dfrac{1}{2}$, което е линейно уравнение спрямо z, $p = \dfrac{1}{x}$, $Q = -\dfrac{1}{2}$

$$z = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[c + \int\left(-\frac{1}{2}e^{-\int \frac{1}{x}dx}\right)dx\right] =$$

$$= e^{\ln x}\left[c + \int\left(-\frac{1}{2}e^{\ln \frac{1}{x}}\right)dx\right] = x[c - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx]$$

$z = x[c - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x}]$ но $y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$, от където $\dfrac{1}{z} = y + \dfrac{1}{x}$ и

$z = \dfrac{1}{y + \frac{1}{x}} = \dfrac{x}{xy + 1}$ или решението е

$$\frac{x}{xy+1} = x[c - \frac{1}{2}\frac{1}{x}].$$

Зад. 26: ① $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$

$y_1 = e^x;\ y = y_1 + \frac{1}{z};\ y = e^x + \frac{1}{z}$

$y' = e^x - \frac{1}{z^2}.z'$. Заместваме в ① и получаваме

$$e^x - \frac{1}{z^2}z' + 2(e^x + \frac{1}{z})e^x - (e^x + \frac{1}{z})^2 = e^{2x} + e^x$$

$$\frac{-z'}{z^2} + 2e^{2x} + \frac{2}{z}e^x - e^{2x} - \frac{2e^x}{z} - \frac{1}{z^2} = e^{2x}$$

$$\frac{-z'}{z^2} - \frac{1}{z^2} = 0$$

$$-z' - 1 = 0;\ z' = -1$$

$$\frac{dz}{dx} = -1;\quad dz = -dx;\quad \int dz = -\int dx;\quad ②\ z = -x + c$$

От $y = e^x + \frac{1}{z}$ определяме z:

$\frac{1}{z} = y - e^x;\ z = \frac{1}{y - e^x}$. Заместваме в ② и получаваме

$$\frac{1}{y - e^x} = -x + C_1;\quad y - e^x = -\frac{1}{x} + C_1\ \ y = e^x - \frac{1}{x} + C_1$$

Зад. 27: $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x,\quad y_1 = ax + b.$

$y_1' = a$. Заместваме стойността на y_1 и y_1' в даденото уравнение на мястото на y и y' и получаваме

$$x.a = (ax+b)^2 - (2x+1)(ax+b) + x^2 + 2x.$$

В дясно на равенството подреждаме по степените на x, сравняваме от ляво и от дясно коефициентите пред равните степени на x и определяме a и b по метода на неопределените коефициенти.

$$ax = a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2ax^2 - ax - 2bx - b + x^2 + 2x$$

$$ax = x^2(a^2 - 2a + 1) + x(2ab - a - 2b + 2) + b^2 - b$$

$a^2 - 2a + 1 = 0;\quad 2ab - a - 2b + 2 = a,\quad b^2 - b = 0$. Решаваме като система последните три равенства и получаваме $a = 1$;

$b(b-1) = 0;\ b_1 = 0;\ b_2 = 1.$

Ако $a = 1$ и $b = 0$, то $y_1 = x$. Тогава уравнението решаваме по следния начин: $y = x + \frac{1}{z};\ y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$; заместваме в условието на задачата и получаваме

$$\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right)x = \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - (2x+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) + x^2 + 2x.$$

$$x - \frac{z'x}{z^2} = x^2 + \frac{1}{z^2} + \frac{2x}{z} - 2x^2 - x - \frac{2x}{z} - \frac{1}{z} + x^2 + 2x$$

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2};\quad z' = z - 1;\quad \frac{dz}{dx} = z - 1;\ z' = \frac{1}{x}z - \frac{1}{x} -$$

уравнението е линейно спрямо z. Тогава $p = \frac{1}{x}$, $Q = -\frac{1}{x}$ и по формулата за решение на линейно уравнение

$$z = e^{\int p(x)dx}\left[C + \int(Q(x)e^{-\int p(x)dx})dx\right]$$

$$z = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[C + \int\left(\frac{1}{x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}\right)dx\right] =$$

$$= e^{\ln x}\left[C + \int\left(\frac{1}{x}e^{\ln\frac{1}{x}}\right)dx\right] =$$

$$= x\left[C + \int\frac{1}{x}\frac{1}{x}dx\right] = x\left[C + \int x^{-2}dx\right] =$$

$$x\left[C + \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right] = x\left[C - \frac{1}{x}\right]$$

$$z = x\left[C - \frac{1}{x}\right] = Cx - 1$$

$z = Cx - 1$. Но $y = x + \frac{1}{z}$. Тогава $y = x + \frac{1}{Cx - 1}$, което

е общия интеграл на уравнението.