Основни методи за интегриране

При решаване на интеграли, под знака на диференциала d, може да се прибавя (или изважда) каквато и да е константа, защото производната ѝ е 0. Но когато е необходимо да се умножава или дели на константа под знака на диференциала, то обратното действие извършваме пред знака на интеграла. Напр. при решаване на $\int \sin 2x dx$ под знака на d умножаваме с 2, а пред $\int$ делим на 2, т. е. $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d2x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$, а при $\int \cos\frac{5}{x}dx =$
$= 5\int \cos\frac{x}{5}d\frac{x}{5} = 5\sin\frac{x}{5} + C$.

Когато искаме да внесем функция, намираща се под знака на $\int$, под знака на d, то предварително я интегрираме и получената стойност написваме под знака на d. Напр. $\int \sin x\cos x dx$: за да внесем $\cos x$ под знака на d, предварително пресмятаме $\int \cos x dx = \sin x + C$, тогава $\int \sin x \cos x dx =$
$= \int \sin x d\sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

1. Решаване на интеграли от вида $\int \frac{dx}{ax+b}$

$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax)}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$. Тук умножихме под знака на d с a и пред $\int$ разделихме на a. Под знака на d прибавихме b, тъй като производната $b' = 0$, защото $b = \text{const}$.

2. Решаване на интеграли от вида $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$; $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$; $x \neq \pm a$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{dx}{(a+x)(a-x)}$. Но $(a+x)+(a-x) = 2a$, което написваме в числителя на подинтегралната функция, а пред знака

на $\int$ делим на $2a$. Тогава $I = \frac{1}{2a}\int \frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x).(a-x)}dx =$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{(a+x)}{(a+x).(a-x)}dx + \frac{1}{2a}\int \frac{(a-x)}{(a+x).(a-x)}dx =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int \frac{d(a-x)}{(a-x)} + \frac{1}{2a}\int \frac{d(x+a)}{(a+x)}dx =$$

$$= -\frac{1}{2a}\ln|a-x| + \frac{1}{2a}\ln|a+x| =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

В решението числителя на подинтегралната функция представяме като сбор от две събираеми и дадения интеграл представяме като сбор от два интеграла:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a).(x+a)}dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)}{(x-a).(x+a)}dx - \frac{1}{2a}\int \frac{(x-a)}{(x-a).(x+a)}dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{d(x-a)}{(x-a)} - \frac{1}{2a}\int \frac{d(x+a)}{(x+a)}dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} + C.$$

По аналогия на предишната задача пресмятаме $(x+a)-(x-a) = 2a$, което записваме в числителя и делим на $2a$ пред знака на $\int$. Получените резултати от последните два интеграла ще ползуваме за улеснение като таблични интеграли.

3. Решаване на интеграли от вида $\int \frac{x^2dx}{a^2+x^2}$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2}dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{a^2+x^2}dx =$$

$$= \int \frac{(x^2+a^2)}{a^2+x^2}dx - a^2\int\frac{dx}{a^2+x^2} = x - a^2\cdot\frac{1}{a}\text{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

$$= x - \text{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

Задача 33 –44. Решете интегралите: .

33)	$\int(3x^2-5x+6)dx$	**34)**	$\int(6x+5)^2dx$
35)	$\int(2x+3)^5dx$	**36)**	$\int 2^x dx$
37)	$\int 2^{3x+5}dx$	**38)**	$\int e^{3x}dx$
39)	$\int\sin ax\,dx$	**40)**	$\int\frac{dx}{\cos^2 5x}$
41)	$\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	**42)**	$\int\frac{dx}{x^2+4}$
43)	$\int\frac{dx}{x^2+3}$	**44)**	$\int\frac{dx}{3x^2+4}$
45)	$\int\text{tg}\,x\,dx$	**46)**	$\int\text{cotg}\,x\,dx$

Решения на задачите:

Задача 33. $\int(3x^2-5x+6)dx = \int 3x^2dx - 5\int x\,dx + 6\int dx =$

$$= \frac{3x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + C = x^3 - \frac{5x^2}{2} + 6x + C.$$

Задача 34. $\int(6x+5)^2dx = \int(36x^2+60x+25)dx =$

$$= \int 36x^2dx + \int 60x\,dx + \int 25dx = \frac{36x^3}{3} + \frac{60x^2}{2} + 25x + C.$$

II *начин:* $\int(6x+5)^2dx = \frac{1}{6}\int(6x+5)^2d(6x+5) = \frac{(6x+5)^3}{18} + C.$

Задача 35. $\int(2x+3)^5dx = \frac{1}{2}\int(2x+3)^5d(2x+3) =$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2x+3)^6}{6} + C = \frac{(2x+3)^6}{12} + C.$$

В последните две задачи правим израза под знака на d еднакъв с този в скобите пред знака на d и прилагаме формулата $\int u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$

Задача 36. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Задача 37. $\int 2^{3x+5}dx = \frac{1}{3}\int 2^{3x+5}d(3x+5) = \frac{2^{3x+5}}{3\ln 2} + C.$

Задача 38. $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$

Задача 39. $\int\sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int\sin ax\,d(ax) = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$

Задача 40. $\int\frac{dx}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5}\int\frac{d(5x)}{\cos^2 5x} = \frac{1}{5}\text{tg}\,5x + C.$

В горните пет задачи правим аргумента под знака на d еднакъв с този на функцията преди знака на d и тогава интегрираме.

Задача 41. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C.$

Интегралът е табличен и ползуваме съответната формула $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

Задача 42. $\int\frac{dx}{x^2+4} = \int\frac{dx}{x^2+2^2} = \frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{x}{2} + C.$

Задача 43. $\int\frac{dx}{x^2+3} = \int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

Задача 44. $\int\frac{dx}{3x^2+4} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+\frac{4}{3}} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\text{arctg}\,\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}x}{2} + C.$$

II *начин:* $\int \frac{dx}{3x^2+4} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2+2^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{3}x)^2+2^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2} + C.$

Задача 45. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} =$

$= -\ln|\cos x| + C.$

Тук пресмятаме предварително $\int \sin x dx = -\cos x + C$, за да внесем $\sin x$ под знака на d.

Задача 46. $\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} =$

$= \ln|\sin x| + C.$

Тук пресмятаме $\int \cos x dx = \sin x + C$, което записваме под знака на d.

4. Решаване на интеграли от вида $\int \sin^m x\cos^n x dx$, където m и n са четни, цели положителни числа

Интеграли от такъв вид решаваме най-често с формулите за понижение на степен: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Задача 47 – 50. Решете интегралите:

47) $\int \sin^2 x dx$ 48) $\int \cos^2 x dx$

49) $\int \cos^4 x dx$ 50) $\int \sin^4 x dx$

Решения на задачите:

Задача 47. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx -$

$-\int \frac{\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2.2}\cos 2x.d2x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

Обръщаме внимание на факта, че аргументът на тригонометричната функция трябва да е равен на този под знака на d.

Задача 48. $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx +$

$+\int \frac{\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x\, d2x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

Задача 49. $\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{2}{4}\int \cos 2x dx +$

$+\frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{2.2}\int \cos 2x.d2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx =$

$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8.4}\int \cos 4x.d4x =$

$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

Задача 50. $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx -$

$-\frac{2}{4}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{2}{4.2}\int \cos 2x.d2x +$

$+\frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int dx +$

$+\frac{1}{8.4}\int \cos 4x.d4x = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

5. Решаване на интеграли от вида $\int \sin^m x\cos^n x dx$, където m и n са четни, цели отрицателни числа

В този случай преобразуваме числителя на подинтегралнатаа функция по подходящ начин – най-често с прилагане на формулите $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$.