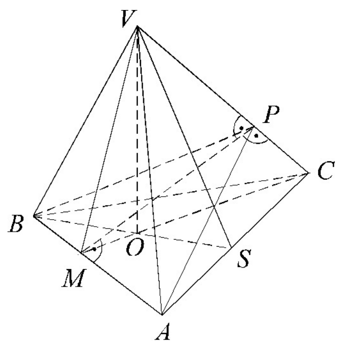
успоредност на права и равнина). Построяваме проектиращата равнина $\beta \perp \alpha$ и намираме пресечницата им $\alpha \cap \beta = b_2$; $b_2 \cap a = A$. В β през т. A построяваме $c \perp b_2$ до пресичането на b в т. B. Оста–отсечка е AB. В действителност не винаги можем да построим пресечницата на β и α, но знаем, че $b||\alpha$ и разстоянието от правата b до равнината α е равно на дължината на оста–отсечка. Обикновено при задачите пресмятаме дължината на оста–отсечка, без да я построяваме, където е възможно.

Задача 18. Правилна триъгълна пирамида има основен ръб 6 и околен 10. Да се намери дължината на оста–отсечка на кой да е основен ръб и кръстосания с него околен ръб.



Решение: През основния ръб AB на правилната триъгълна пирамида $ABCV$ прекарваме равнина $\alpha \perp VC$. Следователно и $VC \perp \alpha$ и VC е перпендикулярен на всички прави от α. Следователно $VC \perp AP$, $VC \perp BP$ и $VC \perp MP$, където M е среда на AB. Но щом пирамидата е правилна, то всичките ѝ околни стени са еднакви триъгълници и съответните им елементи ще бъдат равни. Следователно $AP = BP$ като височини към VC в $\triangle CVA$ и $\triangle BCV$.

Тогава $\triangle ABP$ е равнобедрен. Следователно $PM \perp AB$ и оста–отсечка на AB и VC ще е отсечката MP.

I начин: За да определим дължината на MP, приравняваме лицето на $\triangle MVC$, определено по два начина $\dfrac{MC.OV}{2} = \dfrac{VC.MP}{2}$, от където $MP = \dfrac{MC.OV}{VC}$; $OC = R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$; $VC = 10$; $OV = \sqrt{VC^2 - OC^2} = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$.

$$MC = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3};\ MP = \frac{3\sqrt{3}.2\sqrt{22}}{10} = \frac{3}{5}\sqrt{66}.$$

II начин: От правоъгълния $\triangle MPB$ по Питагоровата теорема определяме $MP = \sqrt{BP^2 - MB^2}$, където $MB = \dfrac{a}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$. BP е височина в $\triangle BCV$ към VC, чиято дължина ще определим, като приравним лицето на $\triangle BCV$, пресметнато по два начина — $\dfrac{BC.VS}{2} = VC \cdot \dfrac{BP}{2}$; $BP = \dfrac{BC.VS}{VC}$, където $VS = \sqrt{VC^2 - SC^2}$.

III начин: От подобието на $\triangle MPC$ и $\triangle VOC$ (и двата правоъгълни и имат общ остър $\measuredangle OCV$). Следователно $\dfrac{MP}{OV} = \dfrac{MC}{VC}$, от където $MP = \dfrac{OV.MC}{VC}$.

IV начин: Изразяваме някакви тригонометрични функции на общия $\measuredangle OCV$ от двата правоъгълни триъгълници $\triangle MPC$ и $\triangle VOC$. Например $\sin \measuredangle OCV = \dfrac{MP}{MC} = \dfrac{OV}{VC}$, от където $MP = \dfrac{MC.OV}{VC}$, където $MC = \dfrac{6\sqrt{3}}{2}$, $OC = \dfrac{6\sqrt{3}}{3}$ и $VC = 10$.

Задача 19. Правилна а) триъгълна б) четириъгълна в) шестоъгълна – пирамида има основен ръб a и двустенен ъгъл φ между две околни стени. Намерете височината на пирамидата.

Решение: От чертежа на предишната задача двустенният ъгъл между две околни стени е $\measuredangle APB = \varphi$ (виж предишната задача).

а) 1. От правоъгълния $\triangle MBP$ определяме MP.

2. $MC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ и от правоъгълния $\triangle MCP$ по Питагоровата теорема определяме PC.

3. От $\triangle MCP \sim VCO$ определяме OV.

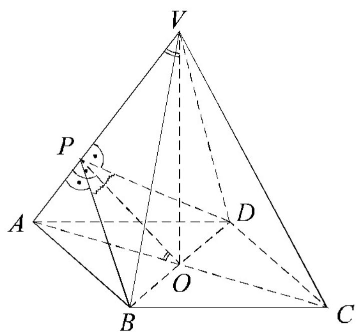
$\dfrac{MB}{MP} = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ или $\dfrac{a}{2.MP} = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$, от където

$$MP = \frac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2}\cdot \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2};$$

$PC = \sqrt{MC^2 - MP^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4}\operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{3 - \operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2}}$. От $\triangle MCP \sim VCO$ (по един прав ъгъл и по един общ $\measuredangle OCV$). Следователно $OC : PC = OV : MP$, от където

$$OV = \frac{OC.MP}{PC} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}}{\dfrac{a}{2}\sqrt{3 - \operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2}}} = \frac{a\sqrt{3}\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}}{3\sqrt{3 - \operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2}}}.$$

Задачата може да се реши и като използваме различните начини на задача 17.



б) През диагонала BD на основата прекарваме равнина, перпендикулярна на околния ръб AV. Тогава и AV е перпендикулярен на тази равнина и на всички прави от нея. Следователно $AV \perp PB$, $AV \perp PD$, $AV \perp PO$. $\sphericalangle BPD = \varphi$ е двустенния ъгъл между двете околни стени ABV и ADV. За да намерим дължината на височината OV на пирамидата, ще постъпим по следния начин:

1. $BO = R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. От правоъгълния $\triangle BOP$ определяме PO.

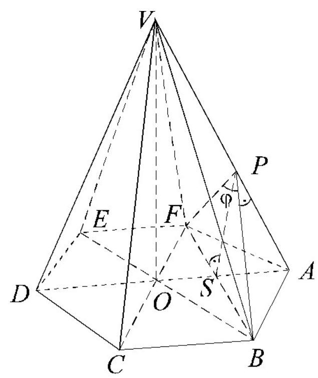
2. $AO = R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. От правоъгълния $\triangle AOV$ определяме OV, $\dfrac{PO}{BO} = \operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}$, от където $PO = BO\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}$ или $PO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}$.

I начин: Чрез използване на метрични зависимости между отсечките в правоъгълния триъгълник AOV получаваме
$AO^2 = AV.AP$ $(a^2 = a_1 c)$.

II начин: От подобието на $\triangle AOP$ и $\triangle AVO$ (по един прав ъгъл и $\sphericalangle OAV$ – общ) $\dfrac{VO}{PO} = \dfrac{AO}{AP}$, от където

$$VO = \frac{PO.AO}{AP} = \frac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2}}} = \frac{a\sqrt{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}}{2\sqrt{1-\operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2}}},\ \text{където}$$

$$\left[\begin{array}{l} AP^2 = AO^2 - PO^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{4} - \\ -\dfrac{2a^2}{4}\operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{a^2}{2}\left(1-\operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2}\right);\quad AP = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2}} \end{array}\right]$$



в) 1. През BF построяваме равнина, перпендикулярна на околния ръб AV. Тогава и AV е перпендикулярен на тази равнина и на всички прави от нея. Следователно $AV \perp PB$, $AV \perp PS$, $AV \perp PF$. Тогава $\sphericalangle BPF = \varphi$ е двустенния ъгъл между двете околни стени ABV и AFV. Дължината на височината OV на пирамидата ще се определи като

1) от правоъгълния $\triangle PSB$ определим PS: $PS : BS = \operatorname{cotg} \dfrac{\varphi}{2}$;
$PS = BS.\operatorname{cotg} \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{cotg} \dfrac{\varphi}{2}$;

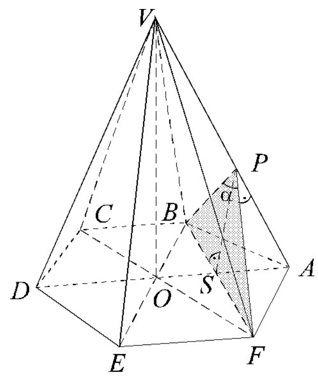
2) от правоъгълния $\triangle ASP$ чрез Питагоровата теорема определяме

$$AP = \sqrt{AS^2 - PS^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}} =$$

$\dfrac{a}{2}\sqrt{1 - 3\operatorname{cotg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$; 3) $\triangle APS \sim AOV$, защото $\sphericalangle A$ е общ и $\sphericalangle APS =$ $= \sphericalangle AOV = 90^\circ$. Следователно $\dfrac{AP}{AO} = \dfrac{PS}{OV}$ или

$$VO = \frac{AO.PS}{AP} = \frac{a\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}}{\dfrac{a}{2}\sqrt{1 - 3\operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2}}} = \frac{a\sqrt{3}\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - 3\operatorname{cotg}^2\dfrac{\varphi}{2}}}.$$

Задача 20. Ъгълът между две съседни околни стени на правилна шестоъгълна пирамида е α, като $\cos\alpha = -\dfrac{7}{13}$. Да се намери отношението на основния ръб и височината.



Решение: През диагонала BF на правилната шестоъгълна пирамида $ABCDEFV$ прекарваме равнина, перпендикулярна на околния ръб AV. Тогава AV е перпендикулярна на равнината и на всички прави от нея, т.е. $AV \perp PB$, $AV \perp PS$, $AV \perp PF$. Следователно $\sphericalangle BPF$ е двустенния ъгъл между две околни стени на пирамидата — ABV и AFV. Да означим основния ръб с a.

Тогава $AS = \dfrac{a}{2}$, $BS = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ като височина в равностранния $\triangle ABO$. Чрез основния ръб ще изразим височината OV и след това ще пресметнем отношението на основния ръб и височината на пирамидата.

От правоъгълния $\triangle BSP$, където $\sphericalangle BPS = \dfrac{\alpha}{2}$, $PS : BS = \operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}$, от където $PS = BS\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}$. От правоъгълния $\triangle ASP$ чрез Питагоровата теорема определяме

$$AP = \sqrt{AS^2 - PS^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{1 - 3\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$\triangle ASP \sim \triangle AVO$, защото имат общ $\sphericalangle OAV$ и по един прав ъгъл. Следователно $AP : AO = PS : OV$, от където

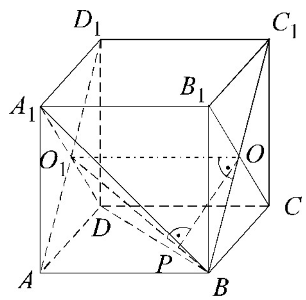
$$OV = \frac{AO.PS}{AP} = \frac{a.a\sqrt{3}.\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{2.\dfrac{a}{2}\sqrt{1 - 3\operatorname{cotg}^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \frac{a\sqrt{3}\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - 3\operatorname{cotg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}.$$

Тогава $\dfrac{a}{OV} = \dfrac{a\sqrt{1 - 3\operatorname{cotg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}{a\sqrt{3}\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}}$. Заместваме $\cos\alpha = -\dfrac{7}{13}$ във формулата $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ и получаваме $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{7}{13}}{1+\dfrac{7}{13}}} = \sqrt{\dfrac{3}{10}}$.

Получената стойност заместваме в отношението

$$\frac{a}{OV} = \frac{\sqrt{1 - 3.\dfrac{3}{10}}}{\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{3}{10}}} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{10}}}{\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{3}{10}}} = \frac{1}{3}.$$

Задача 21. Куб има ръб b. Да се намери най-късото разстояние между кръстосаните диагонали на две съседни страни.



Решение: Търсим разстоянието между B_1C и A_1B — диагонали на две съседни стени на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. През единия край – т.A_1 на A_1B построяваме $A_1D||B_1C$. Построената равнина $BA_1D||B_1C$, защото $B_1C||A_1D$ от нея (от достатъчното условие за успоредност на права и равнина).

Търсим разстоянието от произволна точка на B_1C до равнината A_1DB. Но сечението ABC_1D_1 пресича равнината A_1BD в отсечката BO_1 и диагонала B_1C в т. O. Следователно те лежат в една равнина и търсеното разстояние ще бъде отсечката OP, което е височина в правоъгълния $\triangle BOO_1$, а BO_1 е медиана в $\triangle A_1DB$ ($ABOO_1$ е правоъгълник). От $ab = ch_c$ в правоъгълен триъгълник следва $BO_1.PO = OO_1.BO$, от където $PO = \dfrac{OO_1.BO}{BO_1}$. BO_1 е хипотенуза в правоъгълния $\triangle BAO_1$ и $BO_1 = \sqrt{BA^2 + AO_1^2} = \sqrt{b^2 + \left(\dfrac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \dfrac{b^2}{2}} = b\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ($AB \perp AD_1$, защото $AB \perp AD$ и $AB \perp AA_1$, сл. $AA_1 \perp$ на равнината на ADD_1 и на AD_1 от тази равнина).

$BO = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. Заместваме получените стойности и получаваме $PO = \dfrac{b.b\frac{\sqrt{2}}{2}}{b\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\sqrt{2} = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

Задача 22. Куб с ръб b е пресечен с равнина по един от диагоналите му. Как да се прекара тази равнина така, че лицето на полученото сечение да бъде най-малко и намерете стойността му.