$$=\frac{a^2.\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2.\cos\alpha.\cos\beta}.\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2.a^2.\cos\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\alpha}{2}}{4.\cos\alpha.\cos\beta}=\frac{a^2.\sin\alpha}{4.\cos\alpha.\cos\beta}=\frac{a^2.\text{tg}\,\alpha}{4.\cos\beta}.$$

Стр.77, Зад.1. а) 0; б) 2; в) 9; г) $\frac{k(k-3)}{2}=$ броят на диагоналите в многоъгълник = броя на диагоналните сечения.

Стр.77, Зад.2. а) На куб; б) На правилен тетраедър.

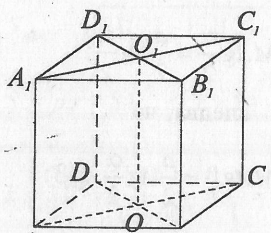
Стр.77, Зад.3. Нека дължините на диагоналите са $\div\, d_1, d_2, \ldots d_k$;
Тогава съответните лица на диагоналните сечения са $d_1.h, d_2.h, \ldots d_k.h$;

$d_2.h=\frac{d_1.h+d_3.h}{2}=\frac{h(d_1+d_3)}{2}$, т.е. пак образуват $\div$.

Нека $\div\div\, d_1, d_2, \ldots d_k$; Лицата са $d_1.h, d_2.h, \ldots d_k.h$;

$(d_2.h)^2=d_1.h.d_3.h=(d_1.d_3).h^2$, т.е. пак $\div\div$.

Изпълнено I свойство на $\div$ и $\div\div$.



Стр.77, Зад.4. Диагоналните сечения ACC_1A_1 и BDD_1B_1 се пресичат в т. O - вътрешна за призмата. Щом призмата е права и двете диагонални сечения минават по околни ръбове, а те са $\perp$ на основата, то и пресечницата на диагоналните сечения ще е $\perp$ на основата - отс. OO_1. Разгледахме една произволна права четириъгълна призма. Също се обобщава и за n-ъгълна права призма. Диагоналните сечения са правоъгълници и $OO_1 \perp$ равнината на основата и $AA_1 \perp$ равн. на основата - следователно $OO_1 \parallel AA_1$ и $OO_1=AA_1$.

Стр.77, Зад.5. Успоредното сечение е еднакво с основата. Следователно то е триъгълник със страни 4 и $\sqrt{13}$ и $\sphericalangle 60^0$ срещу страната $\sqrt{13}$. Намираме третата страна чрез косинусова теорема:

$(\sqrt{13})^2=4^2+x^2-2.4.x.\cos 60^0=16+x^2-2.4.x.\frac{1}{2}$; $13=16+x^2-4x$;

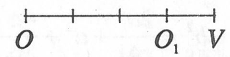
$x^2-4x+3=0$; $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm 1$; $x_1=3$; $x_2=1$;

При $x=3 \rightarrow S_\Delta=\frac{a.b.\sin\gamma}{2}=\frac{4.3.\sin 60^0}{2}=\frac{6.\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$;

При $x=1 \rightarrow S_\Delta=\frac{4.1.\sin 60^0}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Стр.77, Зад.6. $B=S_{основата}=64$; а) Щом височината H на пирамидата се дели 1:3, то $VO_1:VO=1:4$. Тогава $\frac{Q}{B}=\frac{1^2}{4^2}$ или $\frac{Q}{64}=\frac{1}{16}$;

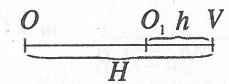
$Q=64:16=4$; Q е лицето на сечението.



б) $OO_1:O_1V=3:5$. Тогава $VO_1:VO=5:8$; $\frac{Q}{B}=\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$;

$Q=\frac{25.B}{64}=\frac{25.64}{64}=25$.

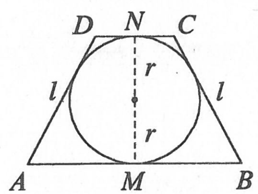
Стр.77, Зад.7. $B=80$; $H=12$; $OO_1=?$



$Q=5$; $OO_1=h$; $\frac{Q}{B}=\frac{h^2}{H^2}$; $\frac{5}{80}=\frac{h^2}{12^2}$; $h^2=\frac{5.12.12}{80}=9$; $VO_1=\sqrt{9}=3=h$;

$OO_1=12-3=9$.

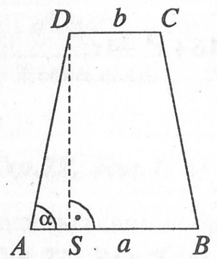
Стр.77, Зад.8. $ABCD$ - околна стена на пирамидата.



$ABCD$ -описан четириъгълник и следователно $\ell+\ell=AB+CD=a+b$;

$a+b=2\ell$; $S_{ABCD}=\frac{a+b}{2}.2r=(a+b).r=2\ell.r$.

Тогава $S=3.2\ell.r=6\ell.r$.



Стр.77, Зад.9. $a:b=3:2$ на правилна четириъгълна пресечена пирамида.

$ABCD$ - околна стена; $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{5}{2}$; $S:S_1=?$

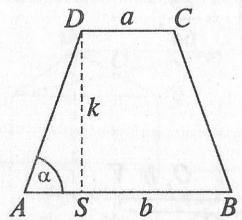
Означаваме $DS=k$; $DS\perp AB$;

$AS=\frac{a-b}{2}$; $\frac{AS}{DS}=\operatorname{cotg}\alpha$; $\frac{a-b}{2k}=\frac{5}{2}$;

$a:b=3:2$; (1) $b=\frac{2a}{3}$; $\frac{a-\frac{2}{3}a}{2k}=\frac{5}{2}$; $\frac{a}{3.2k}=\frac{5}{2}$; $\frac{a}{3k}=5$; $a=15k$; (2) $k=\frac{a}{15}$;

$S=4S_{ABCD}=4.\frac{a+b}{2}.k=2\left(a+\frac{2a}{3}\right).\frac{a}{15}=\frac{2}{15}.\frac{5a}{3}.a=\frac{2a^2}{9}$;

$S_1=S+a^2+b^2=\frac{2a^2}{9}+a^2+\frac{4a^2}{9}=\frac{15a^2}{9}$; $S_1:S=\frac{15a^2}{9}:\frac{2a^2}{9}=\frac{15}{2}$.



Стр.78, Зад.10.

$a=m.b$, $S_{ок.пов.}$, $S_0=B+B_1$, $\frac{S_0}{S}=\frac{m^2+1}{m^2-1}.\operatorname{cotg}\alpha$?

$m>1$; $AB=b$; $CD=a$; $AS=\frac{b-a}{2}$; $\frac{AS}{DS}=\operatorname{cotg}\alpha$;

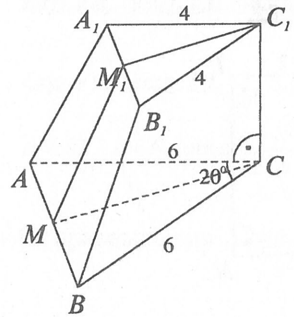
$\frac{b-a}{2k}=\operatorname{cotg}\alpha$; $\frac{m.b-b}{2k}=\operatorname{cotg}\alpha$; $\frac{(m-1).b}{2k}=\operatorname{cotg}\alpha$; $2k.\operatorname{cotg}\alpha=(m-1)b$;

$k=\frac{(m-1)b}{2.\operatorname{cotg}\alpha}=\frac{(m-1)b}{2}.\operatorname{tg}\alpha$; $S_{ABCD}=\frac{a+b}{2}.k=\frac{mb+b}{2}.\frac{(m-1)b}{2}.\operatorname{tg}\alpha=$

$=\frac{(m^2-1)b^2}{4}.\operatorname{tg}\alpha$; $S=4S_{ABCD}=(m^2-1).b^2.\operatorname{tg}\alpha$;

$S_0=B+B_1=a^2+b^2=(mb)^2+b^2=b^2(m^2+1)$;

$\frac{S_0}{S}=\frac{b^2(m^2+1)}{(m^2-1).b^2.\operatorname{tg}\alpha}=\frac{m^2+1}{m^2-1}.\operatorname{cotg}\alpha$.



Стр.78, Зад.11.

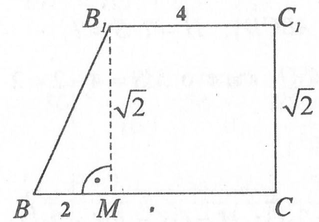
$CC_1\perp(ABC)$; $CC_1=\sqrt{2}$; $S=?$

$S_{BCC_1B_1}=\frac{6+4}{2}.\sqrt{2}=5\sqrt{2}=S_{ACC_1A_1}$;

$BM=6-4=2$.

От правоъгълния ΔBMB_1 следва, че

$BB_1^2=2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=4+2=6$; $BB_1=\sqrt{6}$;

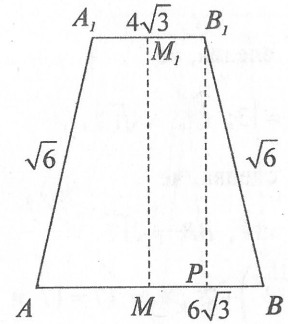


За ΔABC чрез косинусова теорема:

$AB^2=BC^2+AC^2-2BC.AC.\cos120^0=$

$=6^2+6^2-2.6.6.\left(-\frac{1}{2}\right)=72+\frac{72}{2}=108$;

$AB=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$; По аналогия за $\Delta A_1B_1C_1$, където $\sphericalangle A_1C_1B_1=120^0=\sphericalangle ACB$ и косинусова теорема:



$A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2-2.A_1C_1.B_1C_1.\cos120^0=$

$=4^2+4^2-2.4.4.\left(-\frac{1}{2}\right)=32+16=48$;

$A_1B_1=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$; $PB=\frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$;

$\sqrt{3}=PB_1=MM_1$;

$S_{ABB_1A_1}=\frac{6\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=5\sqrt{3}.\sqrt{3}=15$;

$S=S_{ABB_1A_1}+2.S_{BCC_1B_1}=15+2.\frac{6+4}{2}.\sqrt{2}=15+10\sqrt{2}=5\left(3+2\sqrt{2}\right)$.