$y = 0$ – хоризонтална асимптота – това е абсцисната ос. Наклонена асимптота: $y = kx + n$, $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx]$,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x(x^2+1)} = 0.$$

Следователно функцията няма наклонена асимптота. Ако $x = 0$, то $y(0) = 0$; следователно функцията минава през т. $O\ (0;0)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Тъй като $f(x)$ е нечетна функция, графиката може да се начертае и като се използува централна симетрия спрямо т. $O\ (0,0)$.

Зад. 9 Да се изследва функцията и построи графиката ѝ:

$$y = \frac{x^2+1}{x}.$$

Решение: $D_1 : x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$y(-x) = \dfrac{x^2+1}{-x}$ – функцията е нечетна.

$y' = \frac{2x.x-(x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

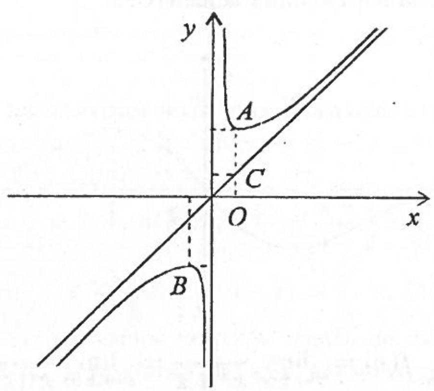
$y' = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x_{1,2} = \pm 1$

$y'' = 2x, \quad y''(1) = 2 > 0$ минимум в т. $x = 1$

$y''(-1) = -2 < 0$ максимум в т. $x = -1$

$y_{\min} = y(1) = 2; \quad A(1;2)$ min

$y_{\max} = y(-1) = -2; \quad B(-1;-2)$ max.



Асимптоти: I – $x = 0$ това е уравнение на ординатната ос.

II – $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = \pm\infty$ – няма хоризонтална асимптота.

III – Наклонена: $y = kx + n$; $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2} =$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2} = 1;\ k = 1,\ n = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+1}{x} - 1.x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = 0, \quad n = 0.$$

Следователно наклонената асимптота е $y = x$ – права, ъглополовяща на първи квадрант. За да я начертаем вземаме 2 произволни точки от нея – т.$O(0;0)$, т. $C(1;1)$.

Зад. 10 Да се изследва функцията и построи графиката ѝ:

$$y = \frac{x}{(x-1)(x-2)}.$$

Решение: $D_1 : x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Функцията е нито четна, нито нечетна, защото D_1 е несиметрична спрямо т. $O(0;0)$.

$$y' = \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)' = \frac{x^2-3x+2-x(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{2-x^2}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$2 - x^2 = 0; \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$y'' = -2x$ (само на числителя)

$y''(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} < 0$ максимум в т. $x = \sqrt{2}$

$y''(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} > 0$ минимум в т. $x = -\sqrt{2}$

$$y_{\max} = y(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2-3\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}.\frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}+6}{16-18} = -(2\sqrt{2}+3) \approx -5,8, \quad \text{т. } A(\sqrt{2}; -5,8) \max$$

$$y_{\min} = y(-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}+2} = \frac{-\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}.\frac{4-3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-4\sqrt{2}+6}{16-18} = 2\sqrt{2} - 3 \approx -0,2, \quad \text{т. } B(-\sqrt{2}; -0,2) \min$$

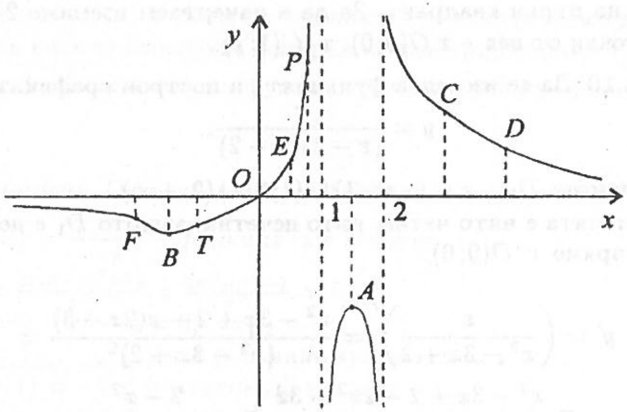
Асимптоти: вертикални – $x = 1$ и $x = 2$ – прави, успоредни на ординатната ос, хоризонтална

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim \frac{1}{x} = 0$$

$y = 0$ е абсцисна ос.

За да начертаем графиката, трябва да вземем поне по две точки надясно от $x = 2$ и две наляво от $x = 1$. Ще намерим подходящи точки от графиката



$x = -2 \qquad y(-2) = -\dfrac{1}{6} \qquad F\left(-2; -\dfrac{1}{6}\right)$

$x = -1 \qquad y(-1) = -\dfrac{1}{6} \qquad T\left(-1; -\dfrac{1}{6}\right)$

$x = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad O(0;0)$

$x = \frac{1}{2} \qquad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3} \qquad E\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}\right)$

$x = 0,75 \qquad y(0,75) = 2,4 \qquad P(0,75; 2,4)$

$x = 3 \qquad y(3) = \dfrac{3}{2} \qquad C\left(3; \dfrac{3}{2}\right)$

$x = 4 \qquad y(4) = \dfrac{2}{3} \qquad D\left(4; \dfrac{2}{3}\right)$

Зад. 11 Да се изследва функцията и построи графиката ѝ:

$$y = \frac{x}{x^2-1}.$$

Решение: $D_1(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

$y(-x) = \dfrac{-x}{x^2-1}$ – функцията е нечетна. Следователно графиката

е симетрична спрямо началото на координатната система и за да начертаем графиката на дадената функция е достатъчно да вземем само точки наляво или надясно от ординатната ос, и намерим симетричните им спрямо началото на координатната система, което не сме показали в следващите функции. Предоставяме това на читателя.

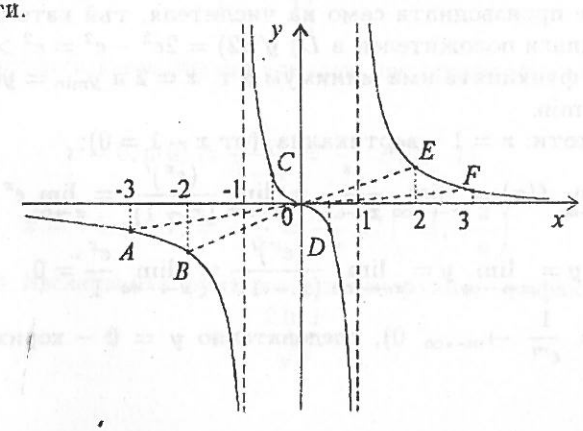
$$y' = \frac{1(x^2-1) - x(2x-0)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-(1+x^2)}{(x^2-1)^2}$$

Първата производна е винаги отрицателна, защото $1 + x^2 > 0$ винаги и знаменателят е винаги положителен (защото е четна степен). Следователно функцията е винаги намаляваща в D_1 и няма нито максимум нито минимум.

Асимптоти: $x^2 - 1 = 0$, $x = 1$ и $x = 1$ – има две вертикални асимптоти

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = 0$$

$y = 0$ – хоризонтална асимптота – това е абсцисната ос. Наклонена асимптота няма. За да начертаем графиката на функцията ще изберем подходящи точки наляво и надясно от вертикалните асимптоти.



$$x=-3 \qquad y=-\frac{3}{8} \qquad A\left(-3;-\frac{3}{8}\right)$$

$$x=-2 \qquad y=-\frac{2}{3} \qquad B\left(-2;-\frac{2}{3}\right)$$

$$x=-\frac{1}{2} \qquad y=\frac{2}{3} \qquad C\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$$

$$x=0 \qquad y=0 \qquad O(0;0)$$

$$x=\frac{1}{2} \qquad y=-\frac{2}{3} \qquad D\left(\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right)$$

$$x=2 \qquad y=\frac{2}{3} \qquad E\left(2;\frac{2}{3}\right)$$

$$x=3 \qquad y=\frac{3}{8} \qquad F\left(3;\frac{3}{8}\right)$$

Графиката чертаем така, че да се приближава към асимптотите. За де начертаем графиката е достатъчно да определим т. O, E и D и намерим симетричните им относно т. $O(0,0)$.

Зад. 12 Изследвайте функцията и начертайте графиката:

$$y=\frac{e^x}{x-1}$$

Решение: $x\neq 1, D: x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

$y'=\dfrac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\dfrac{xe^x-2e^x}{(x-1)^2}$; $xe^x-2e^x=0$, от където $x=2$.

$$y''=e^x+xe^x-2e^x=xe^x-e^x$$

(Намираме производната само на числителя, тъй като знаменателят е винаги положителен в D) $y''(2)=2e^2-e^2=e^2>0$. Следователно функцията има минимум в т. $x=2$ и $y_{\min}=y(2)=e^2$, т. $A(2;e^2)$ min.

Асимптоти: $x=1$ – вертикална, (от $x-1=0$);

$$y=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty,$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{(e^x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1}=0,$$

от $e^{-m}=\dfrac{1}{e^m}\to_{m\to\infty}0$), следователно $y=0$ – хоризонтална

асимптота.

Наклонена асимптота:

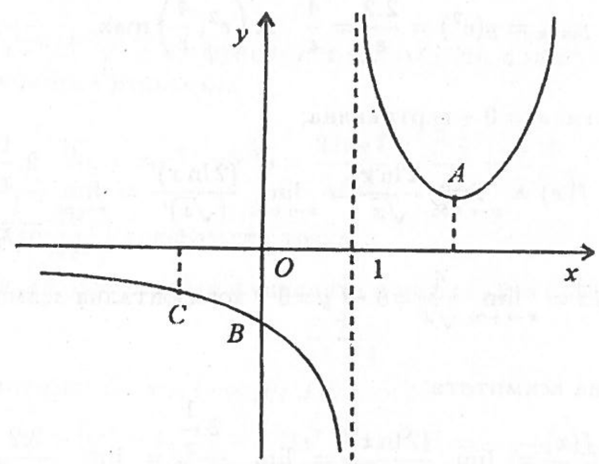
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2-x)'}=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{(e^x)'}{(2x-1)'}=\lim_{x\to-\pm\infty}\frac{e^x}{2}=$$

$$=\begin{cases}\infty & \text{при } x\to+\infty\\ 0 & \text{при } x\to-\infty.\end{cases}$$

Следователно функцията няма наклонена асимптота.

Изпъкналост и вдлъбнатост:

$y''=xe^x-e^x$. В интервала $(1;+\infty)$, $y''=e^x(x-1)$ е положителна, защото $e^x>0$, $x-1>0$ и функцията е изпъкнала, а в $(-\infty;1)$, $y''<0$ защото $e^x>0$, но $x-1<0$. y'' не се анулира никъде ($x=1\notin D$) и следователно функцията няма инфлексни точки.



За да начертаем графиката вземаме две произволни точки от $(-\infty;1)$.

$$x=0, y(0)=\frac{e^0}{0-1}=-1; B(0;-1).$$

$$x=-1, y(-1)=\frac{e^{-1}}{-2}=-\frac{2}{e}; C\left(-1;-\frac{2}{e}\right).$$

Зад. 13 Изследвайте функцията и начертайте графиката:

$$y=\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}.$$